**SME0602 - Cálculo Numérico – 1º semestre 2020**

**Prof. Elias Salomão Helou Neto**

**Projeto Prático 1**

**Zeros de Funções de Uma Variável**

**Alunos:**

**Paulo Katsuyuki Muraishi Kamimura 10277040**

**Guilherme Eiji Ichibara 10310700**

**Data: 30/05/2020**

[1. Introdução 3](#_Toc41853378)

[2. Questões 3](#_Toc41853379)

[2.1. Método de Newton 3](#_Toc41853380)

[2.2. Método de Halley 4](#_Toc41853381)

[2.3. Implementações 5](#_Toc41853382)

[2.4. Uso das Implementações 7](#_Toc41853383)

[2.4.1. Equação 1 9](#_Toc41853384)

[2.4.2. Equação 2 11](#_Toc41853385)

[2.4.3. Equação 3 13](#_Toc41853386)

[2.5. Estimativa da ordem de convergência 15](#_Toc41853387)

[2.5.1. Equação 1 15](#_Toc41853388)

[2.5.2. Equação 2 18](#_Toc41853389)

[2.5.3. Equação 3 20](#_Toc41853390)

[3. Conclusão 21](#_Toc41853391)

# Introdução

Neste trabalho será implementado quatro métodos de aproximação de raízes, cada funcionamento será observado e os resultados serão comparados com três diferentes equações. Cada equação envolve um caso especial que será discutido ao decorrer do relatório. Será também analisado a ordem de convergência de cada método aplicado nas diferentes equações

O desenvolvimento do programa foi feito em linguagem C e além de ser responsável pelo cálculo das raízes também possui a função de converter os dados para o formato CSV para a facilitação da análise e interpretação dos dados.

# 2. Questões

# 2.1. Método de Newton

O d-ésimo método de Householder é dado por:

(1)

Substituindo em (1) temos:

(2)

Usando a regra do quociente em :

(3)

Substituindo (3) em (2):

Cortando o elemento em comum no numerador e denumerador obtemos:

# 2.2. Método de Halley

Substituindo em (1) temos:

(4)

Sabemos dado pela equação (3), para calcular derivamos novamente (3) também utilizando regra do quociente:

(5)

Obs: No passo acima foi necessário realizar a regra da cadeia na hora de realizar , resultando em .

Substituindo (3) e (5) em (4):

Cortando os termos e 2 do numerador e enumerador:

Distribuindo os termos para deixar com uma aparência da equação do enunciado do trabalho:

# 2.3. Implementações

A implementação se baseia nos arquivos *main.c, equations.c e methods.c.*

* **main.c** – função principal que invoca a execução de todos os métodos e também responsável por salvar os resultados num .csv para facilitação da transposição dos dados para uma tabela (por exemplo ***Google Sheets ou LibreOffice***). Vale ressaltar que tal algoritmo não é necessário para a realização dos cálculos das raízes, só foi feito para facilitar a leitura dos dados.

A função implementada dentro da main.c responsável pela escrita dos dados no formato CSV chama concatena\_linha e basicamente separa os dados com um “;”. Também em sua implementação existe um controle para que ele pare de printar iterações caso todos os resultados extraídos de um determinado método já foram printados.

* **equations.c** – contém a definição das equações 1, 2 e 3 apresentado no enunciado. Cada função contém dois parâmetros, a variável x e a ordem de sua derivada, variando assim qual equação ele retornará.

O controle da escolha da ordem da derivada é realizado por meio de um switch/case.

|  |  |
| --- | --- |
| **Parâmetros** | **Entrada** |
| Variável da equação | x |
| Ordem da derivada | 0 = Função original |
| 1 = Primeira derivada |
| 2 = Segunda derivada |

|  |
| --- |
| double f(double x, int i){  switch (i){  case 0:  return (x - cos(x));  case 1:  return (1 + sin(x));  case 2:  return (cos(x));  default:  return -1;  }  } |

|  |
| --- |
| double g(double x, int i){  switch (i){  case 0:  return (x\*x\*x - 9\*x\*x + 27\*x -27);  case 1:  return (3\*x\*x-18\*x+27);  case 2:  return (6\*x-18);  default:  return -1;  }  } |

|  |
| --- |
| double h(double x, int i){  switch (i){  case 0:  return (exp(x) - cos(x));  case 1:  return (exp(x) + sin(x));  case 2:  return (exp(x) + cos(x));  default:  return -1;    } |

* **methods.c** – contém a implementação dos métodos para aproximação de raízes: bissecção, secante, Newton e Halley. Cada método recebe como parâmetro os valores iniciais e dependendo de qual método pode receber dois valores iniciais -bissecção e secante.

Também recebe como um parâmetro um vetor para armazenar todos os resultados a fim de possibilitar a utilização desses dados posteriormente. Por fim, a função de cada implementação dos métodos retorna à quantidade de iterações que foram necessárias para cumprir os critérios de tolerância absoluta determinado no enunciado da questão. A fim de cumprir tal critério foi determinado uma condição de parada implementada na condição de uma rotina do...while.

# 2.4. Uso das Implementações

Para compilar o programabasta abrir o terminal na pasta do projeto e executar o seguinte comando para compilar os arquivos.c.

|  |
| --- |
| gcc main.c equations.c methods.c -o main |

Para rodar o programaexecute o seguinte comando no terminal aberto na pasta do projeto.

|  |
| --- |
| ./main |

Após a execução do programa será criado três arquivos .csv na pasta do projeto, sendo eles resultados1.csv, resultados2.csv e resultados3.csv. Cada um contendo os resultados dos quatro métodos. Resultado1 são os dados da primeira equação, resultado2 são os dados da segunda equação assim por diante.

A função responsável por converter os resultados já calculados e armazenados em um vetor para um arquivo .csv é opcional e foi somente uma forma de facilitar a visualização dos dados e não faz parte da implementação dos cálculos e dos métodos em si.

Foi discutido se isso influenciaria no desempenho do método numérico e chegou-se à conclusão que o registro dos dados não significa que o método realizou cálculos desnecessários para a obtenção das raízes.

Caso for desejado abrir os arquivos em qualquer plataforma algumas observações são importantes na hora da visualização dos dados. É importante certificar que o separador decimal esteja definido como “.” (ponto). Outro aspecto importante também na visualização é a precisão, é necessário selecionar todas as células e configurá-los como formato de número com 16 casas decimais.

Porém, ainda é possível abrir os arquivos em qualquer editor de texto, sendo possível visualizar os resultados sem qualquer formatação ou configuração.

# 2.4.1. Equação 1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| i | Bissection | Secant | Newton | Halley |
| **a=0; b=2** | **x0=0; x1=2** | **x0=1** | **x0=1** |
| 0 | 1,0000000000000000 | 0,0000000000000000 | 1,0000000000000000 | 1,0000000000000000 |
| 1 | 0,5000000000000000 | 2,0000000000000000 | 0,7503638678402430 | 0,7408739950803430 |
| 2 | 0,7500000000000000 | 0,5854549279332180 | 0,7391128909113610 | 0,7390851338775810 |
| 3 | 0,6250000000000000 | 0,7171348682551960 | 0,7390851333852840 | 0,7390851332151600 |
| 4 | 0,6875000000000000 | 0,7399007654901230 | 0,7390851332151600 | 0,7390851332151600 |
| 5 | 0,7187500000000000 | 0,7390811360542050 | 0,7390851332151600 |  |
| 6 | 0,7343750000000000 | 0,7390851324955940 |  |  |
| 7 | 0,7421875000000000 | 0,7390851332151610 |  |  |
| 8 | 0,7382812500000000 | 0,7390851332151600 |  |  |
| 9 | 0,7402343750000000 |  |  |  |
| 10 | 0,7392578125000000 |  |  |  |
| 11 | 0,7387695312500000 |  |  |  |
| 12 | 0,7390136718750000 |  |  |  |
| 13 | 0,7391357421875000 |  |  |  |
| 14 | 0,7390747070312500 |  |  |  |
| 15 | 0,7391052246093750 |  |  |  |
| 16 | 0,7390899658203120 |  |  |  |
| 17 | 0,7390823364257810 |  |  |  |
| 18 | 0,7390861511230460 |  |  |  |
| 19 | 0,7390842437744140 |  |  |  |
| 20 | 0,7390851974487300 |  |  |  |
| 21 | 0,7390847206115720 |  |  |  |
| 22 | 0,7390849590301510 |  |  |  |
| 23 | 0,7390850782394400 |  |  |  |
| 24 | 0,7390851378440850 |  |  |  |
| 25 | 0,7390851080417630 |  |  |  |
| 26 | 0,7390851229429240 |  |  |  |
| 27 | 0,7390851303935050 |  |  |  |
| 28 | 0,7390851341187950 |  |  |  |
| 29 | 0,7390851322561500 |  |  |  |
| 30 | 0,7390851331874720 |  |  |  |
| 31 | 0,7390851336531340 |  |  |  |
| 32 | 0,7390851334203030 |  |  |  |
| 33 | 0,7390851333038880 |  |  |  |
| 34 | 0,7390851332456800 |  |  |  |
| 35 | 0,7390851332165760 |  |  |  |
| 36 | 0,7390851332020240 |  |  |  |
| 37 | 0,7390851332093000 |  |  |  |
| 38 | 0,7390851332129380 |  |  |  |
| 39 | 0,7390851332147570 |  |  |  |
| 40 | 0,7390851332156670 |  |  |  |
| 41 | 0,7390851332152120 |  |  |  |
| 42 | 0,7390851332149850 |  |  |  |
| 43 | 0,7390851332150980 |  |  |  |
| 44 | 0,7390851332151550 |  |  |  |
| 45 | 0,7390851332151840 |  |  |  |
| 46 | 0,7390851332151690 |  |  |  |
| 47 | 0,7390851332151620 |  |  |  |
| 48 | 0,7390851332151590 |  |  |  |
| 49 | 0,7390851332151600 |  |  |  |
| 50 | 0,7390851332151600 |  |  |  |

Para escolha dos valores iniciais, foi escolhido um valor que fosse próximo o suficiente da raiz, no caso da bisseção era importante que a raiz estivesse dentro do intervalo [a, b]. Não há muito o que se comentar sobre essa equação, o único detalhe e que todos os métodos acabaram convergindo para a mesma raiz, o que não ocorreu nas outras equações.

# 2.4.2. Equação 2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| i | Bissection | Secant | Newton | Halley |
| **a=1; b=6** | **x0=1; x1=5** | **x0 = 2** | **x0 = 2** |
| 0 | 3,5000000000000000 | 1,0000000000000000 | 2,0000000000000000 | 2,0000000000000000 |
| 1 | 2,2500000000000000 | 5,0000000000000000 | 2,3333333333333300 | 2,5000000000000000 |
| 2 | 2,8750000000000000 | 3,0000000000000000 | 2,5555555555555400 | 2,7500000000000000 |
| 3 | 3,1875000000000000 | 3,0000000000000000 | 2,7037037037037000 | 2,8750000000000000 |
| 4 | 3,0312500000000000 |  | 2,8024691358024200 | 2,9375000000000000 |
| 5 | 2,9531250000000000 |  | 2,8683127572015900 | 2,9687500000000000 |
| 6 | 2,9921875000000000 |  | 2,9122085048007800 | 2,9843750000000000 |
| 7 | 3,0117187500000000 |  | 2,9414723365340000 | 2,9921875000000000 |
| 8 | 3,0019531250000000 |  | 2,9609815576891500 | 2,9960937500000000 |
| 9 | 2,9970703125000000 |  | 2,9739877051238300 | 2,9980468750000000 |
| 10 | 2,9995117187500000 |  | 2,9826584700833100 | 2,9990234375000000 |
| 11 | 3,0007324218750000 |  | 2,9884389800626700 | 2,9995117187500000 |
| 12 | 3,0001220703125000 |  | 2,9922926533883500 | 2,9997558593750000 |
| 13 | 2,9998168945312500 |  | 2,9948617689313700 | 2,9998779296875000 |
| 14 | 2,9999694824218700 |  | 2,9965745124777700 | 2,9999389648437500 |
| 15 | 3,0000457763671800 |  | 2,9977163416524500 | 2,9999694824218700 |
| 16 | 3,0000076293945300 |  | 2,9984775617417700 | 2,9999847412109300 |
| 17 | 3,0000267028808500 |  | 2,9989850408280400 | 2,9999847412109300 |
| 18 | 3,0000362396240200 |  | 2,9993233596561500 |  |
| 19 | 3,0000410079956000 |  | 2,9995489080095900 |  |
| 20 | 3,0000433921813900 |  | 2,9996992685912700 |  |
| 21 | 3,0000445842742900 |  | 2,9997995183422600 |  |
| 22 | 3,0000451803207300 |  | 2,9998663423813000 |  |
| 23 | 3,0000454783439600 |  | 2,9999108896202700 |  |
| 24 | 3,0000456273555700 |  | 2,9999401202681300 |  |
| 25 | 3,0000457018613800 |  | 2,9999599369244200 |  |
| 26 | 3,0000457391142800 |  | 2,9999746933148600 |  |
| 27 | 3,0000457577407300 |  | 2,9999894864331000 |  |
| 28 | 3,0000457670539600 |  | 2,9999466323512500 |  |
| 29 | 3,0000457717105700 |  | 2,9999640958743200 |  |
| 30 | 3,0000457740388800 |  | 2,9999751196829900 |  |
| 31 | 3,0000457752030300 |  | 2,9999827718755300 |  |
| 32 | 3,0000457757851100 |  | 2,9999987315932100 |  |
| 33 | 3,0000457760761400 |  | 2,9970553909015200 |  |
| 34 | 3,0000457762216600 |  | 2,9980369272834500 |  |
| 35 | 3,0000457762944200 |  | 2,9986912844494500 |  |
| 36 | 3,0000457763308000 |  | 2,9991275244408700 |  |
| 37 | 3,0000457763489900 |  | 2,9994183482817500 |  |
| 38 | 3,0000457763580900 |  | 2,9996122333164700 |  |
| 39 | 3,0000457763626400 |  | 2,9997414919257300 |  |
| 40 | 3,0000457763649100 |  | 2,9998276164802600 |  |
| 41 | 3,0000457763660500 |  | 2,9998850030092600 |  |
| 42 | 3,0000457763666100 |  | 2,9999231513463000 |  |
| 43 | 3,0000457763669000 |  | 2,9999488184297900 |  |
| 44 | 3,0000457763670400 |  | 2,9999650931690800 |  |
| 45 | 3,0000457763671100 |  | 2,9999767558607200 |  |
| 46 | 3,0000457763671500 |  | 2,9999767558607200 |  |
| 47 | 3,0000457763671600 |  |  |  |
| 48 | 3,0000457763671700 |  |  |  |
| 49 | 3,0000457763671800 |  |  |  |
| 50 | 3,0000457763671800 |  |  |  |
| 51 | 3,0000457763671800 |  |  |  |

Semelhante a equação anterior também foi escolhido valores próximos a raiz, algo que quis-se salientar é que nesse método, apesar de não ser garantido o critério de convergência, a escolha de e no método da secante ou de a e b no método da bisseção é importante, já que dependendo do valor a busca passa a ser trivial, no caso da bisseção se a e b fossem iguais a e escolhidos no método da secante na primeira iteração () o valor encontrado já seria 3, do mesmo modo o valor escolhido mostra que a reta secante intercepta o eixo das abcissas diretamente no valor 3, achando assim a raiz de forma trivial.

Além disso fizemos testes com outros valores e no método da secante nem sempre se convergia para um valor, as vezes retornando ou infinito. Algo que podemos perceber ao analisar a equação 3 em um gráfico é que existe um intervalo grandes de pontos na região próximos da interceptação do eixo x, podendo induzir os métodos a convergirem a valores ligeiramente diferentes

Assim, mesmo seguindo a tolerância desejada, o resultado pode convergir em valores ligeiramente diferentes da raiz real, o que não ocorreu nas outras equações.

# 2.4.3. Equação 3

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| i | Bissection | Secant | Newton | Halley |
| **a=-1; b=2** | **x0=1; x1=2** | **x0=1** | **x0=1** |
| 0 | 0,5000000000000000 | 1,0000000000000000 | 1,0000000000000000 | 1,0000000000000000 |
| 1 | -0,2500000000000000 | 2,0000000000000000 | 0,3881655168657400 | 0,1501880136433960 |
| 2 | 0,1250000000000000 | 0,6129566283785490 | 0,0920303459456630 | 0,0020076165148970 |
| 3 | -0,0625000000000000 | 0,4025794026714920 | 0,0073463293261812 | 0,0000000067107334 |
| 4 | 0,0312500000000000 | 0,1348442424705910 | 0,0000533159208848 | -0,0000000000000001 |
| 5 | -0,0156250000000000 | 0,0375409545988820 | 0,0000000028423348 | 0,0000000000000001 |
| 6 | 0,0078125000000000 | 0,0044265015837714 | 0,0000000000000000 |  |
| 7 | -0,0039062500000000 | 0,0001605566619041 | 0,0000000000000000 |  |
| 8 | 0,0019531250000000 | 0,0000007079976337 |  |  |
| 9 | -0,0009765625000000 | 0,0000000001136586 |  |  |
| 10 | 0,0004882812500000 | 0,0000000000000000 |  |  |
| 11 | -0,0002441406250000 | 0,0000000000000000 |  |  |
| 12 | 0,0001220703125000 |  |  |  |
| 13 | -0,0000610351562500 |  |  |  |
| 14 | 0,0000305175781250 |  |  |  |
| 15 | -0,0000152587890625 |  |  |  |
| 16 | 0,0000076293945313 |  |  |  |
| 17 | -0,0000038146972656 |  |  |  |
| 18 | 0,0000019073486328 |  |  |  |
| 19 | -0,0000009536743164 |  |  |  |
| 20 | 0,0000004768371582 |  |  |  |
| 21 | -0,0000002384185791 |  |  |  |
| 22 | 0,0000001192092896 |  |  |  |
| 23 | -0,0000000596046448 |  |  |  |
| 24 | 0,0000000298023224 |  |  |  |
| 25 | -0,0000000149011612 |  |  |  |
| 26 | 0,0000000074505806 |  |  |  |
| 27 | -0,0000000037252903 |  |  |  |
| 28 | 0,0000000018626451 |  |  |  |
| 29 | -0,0000000009313226 |  |  |  |
| 30 | 0,0000000004656613 |  |  |  |
| 31 | -0,0000000002328306 |  |  |  |
| 32 | 0,0000000001164153 |  |  |  |
| 33 | -0,0000000000582077 |  |  |  |
| 34 | 0,0000000000291038 |  |  |  |
| 35 | -0,0000000000145519 |  |  |  |
| 36 | 0,0000000000072760 |  |  |  |
| 37 | -0,0000000000036380 |  |  |  |
| 38 | 0,0000000000018190 |  |  |  |
| 39 | -0,0000000000009095 |  |  |  |
| 40 | 0,0000000000004547 |  |  |  |
| 41 | -0,0000000000002274 |  |  |  |
| 42 | 0,0000000000001137 |  |  |  |
| 43 | -0,0000000000000568 |  |  |  |
| 44 | 0,0000000000000284 |  |  |  |
| 45 | -0,0000000000000142 |  |  |  |
| 46 | 0,0000000000000071 |  |  |  |
| 47 | -0,0000000000000036 |  |  |  |
| 48 | 0,0000000000000018 |  |  |  |
| 49 | -0,0000000000000009 |  |  |  |
| 50 | 0,0000000000000004 |  |  |  |
| 51 | -0,0000000000000002 |  |  |  |

A equação 3 teve um bom comportamento para o cálculo das raízes, a única coisa que teve de ser levada em conta foi a escolha dos valores iniciais para que o algoritmo pudesse convergir para a raiz correta.

# 2.5. Estimativa da ordem de convergência

Será utilizado a seguinte fórmula para estimar a ordem de convergência

(6)

Sendo e .

Será utilizado uma planilha .ods (OpenDocument Spreadsheet) para o cálculo da ordem de convergência de todos os métodos de todas as equações (aproveitando os arquivos anteriormente criados). O documento pode ser aberto em qualquer software, no nosso caso foi utilizado a ferramenta online Google Sheets.

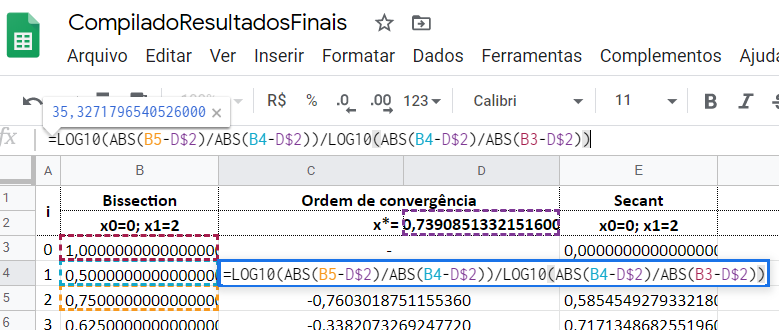


Figura Exemplo de implementação do cálculo da Ordem de Convergência na equação 1

|  |
| --- |
| **=LOG10(ABS(B5-D$2)/ABS(B4-D$2))/LOG10(ABS(B4-D$2)/ABS(B3-D$2))** |

A fórmula acima foi desenvolvida e copiada para o restante da coluna, variando as referências de e fixando o valor da raiz em “D$2”.

Na planilha anexada no projeto estão os resultados e os dados de convergência, separado em três abas, uma aba para cada equação. Vale ressaltar que tanto o para o primeiro termo e o último não foi realizado os cálculos por não haver um valor anterior ou seguinte. Foi substituído por um “- “.

# 2.5.1. Equação 1

Para a primeira equação foi necessário realizar uma aproximação da raiz e dessa forma foi considerado o resultado obtido pelo método de Halley.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **i** | **Bissection** | **Secant** | **Newton** | **Halley** |
| **Ordem de convergência Equação 1** | | | |
| **0** | - | - | - | - |
| **1** | 35.3271796540526000 | -3.9407044967344100 | 1.9123320892035700 | 2.9721231406170000 |
| **2** | -0.7603018751155360 | 0.9243364495108540 | 1.9980312779063500 | #NÚM! |
| **3** | -0.3382073269247720 | 1.6921692522046500 | #NÚM! | #DIV/0! |
| **4** | 1.1728234984235400 | 1.6152664457897700 | #DIV/0! | - |
| **5** | 1.5712320797384200 | 1.6212545741323400 | - |  |
| **6** | 0.2854787463506430 | 1.5641967456617200 |  |  |
| **7** | 3.2342562317409200 | #NÚM! |  |  |
| **8** | -0.2646520020048970 | - |  |  |
| **9** | -5.3033075759701700 |  |  |  |
| **10** | -0.3181591727875350 |  |  |  |
| **11** | -2.4630388644038500 |  |  |  |
| **12** | 0.2322910327677060 |  |  |  |
| **13** | 4.5787872417449000 |  |  |  |
| **14** | -0.4152219884817950 |  |  |  |
| **15** | -2.1722078301105200 |  |  |  |
| **16** | 0.3838243553770440 |  |  |  |
| **17** | 1.8480482345088300 |  |  |  |
| **18** | 0.1334805485067590 |  |  |  |
| **19** | 19.4798866591744000 |  |  |  |
| **20** | -0.7077298192016950 |  |  |  |
| **21** | -0.4636490450974510 |  |  |  |
| **22** | 1.3372767117611300 |  |  |  |
| **23** | 2.1457772989369300 |  |  |  |
| **24** | -0.6843472498045120 |  |  |  |
| **25** | -0.5292958830935000 |  |  |  |
| **26** | 1.4415475438617500 |  |  |  |
| **27** | 0.8812280882299900 |  |  |  |
| **28** | -0.0522336528878256 |  |  |  |
| **29** | -59.6022272440126000 |  |  |  |
| **30** | -0.7789102267271520 |  |  |  |
| **31** | -0.2746858857590060 |  |  |  |
| **32** | 1.1050552876445000 |  |  |  |
| **33** | 1.2732995701031200 |  |  |  |
| **34** | 2.8772337169341800 |  |  |  |
| **35** | -0.7254499646446900 |  |  |  |
| **36** | -0.3623792855887260 |  |  |  |
| **37** | 1.2013394499902700 |  |  |  |
| **38** | 1.7604745172383400 |  |  |  |
| **39** | -0.1345032622220400 |  |  |  |
| **40** | -9.9211957330976600 |  |  |  |
| **41** | -0.5329677280194320 |  |  |  |
| **42** | -0.8536612199299890 |  |  |  |
| **43** | 2.4307739501100500 |  |  |  |
| **44** | -0.6225933804216380 |  |  |  |
| **45** | -0.6252832460836960 |  |  |  |
| **46** | 1.5334752630571200 |  |  |  |
| **47** | 0.4608454206183700 |  |  |  |
| **48** | #NÚM! |  |  |  |
| **49** | #DIV/0! |  |  |  |
| **50** | - |  |  |  |

Obs. Para iterações próximos da raiz (últimas iterações do algoritmo) é possível ver erros como #NÚM! E #DIV/0.

# 2.5.2. Equação 2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **i** | **Bissection** | **Secant** | **Newton** | **Halley** |
| **Ordem de convergência Equação 2** | | | |
| **0** | - | - | - | - |
| **1** | -4.4190225827029100 | #NÚM! | 0.9999999999999380 | 1.0000000000000000 |
| **2** | -0.2262943855309170 | #DIV/0! | 1.0000000000001300 | 1.0000000000000000 |
| **3** | -4.4190225827029100 | - | 0.9999999999993560 | 1.0000000000000000 |
| **4** | -0.2262943855309170 |  | 1.0000000000001500 | 1.0000000000000000 |
| **5** | -4.4190225827029100 |  | 0.9999999999925740 | 1.0000000000000000 |
| **6** | -0.2262943855309170 |  | 1.0000000000140400 | 1.0000000000000000 |
| **7** | -4.4190225827029100 |  | 0.9999999999822320 | 1.0000000000000000 |
| **8** | -0.2262943855309170 |  | 0.9999999997963920 | 1.0000000000000000 |
| **9** | -4.4190225827029100 |  | 1.0000000003227800 | 1.0000000000000000 |
| **10** | -0.2262943855309170 |  | 1.0000000014134900 | 1.0000000000000000 |
| **11** | -4.4190225827029100 |  | 1.0000000027145800 | 1.0000000000000000 |
| **12** | -0.2262943855309170 |  | 0.9999999985498340 | 1.0000000000000000 |
| **13** | -4.4190225823081300 |  | 0.9999998941532340 | 1.0000000000000000 |
| **14** | -0.2262943853697510 |  | 1.0000001037129200 | 0.9999999997690660 |
| **15** | -4.4190225862688200 |  | 1.0000010363497900 | 0.9999999997480720 |
| **16** | -0.6991803251659060 |  | 0.9999981534856200 | 0.0000000000000000 |
| **17** | 0.2437665045381570 |  | 0.9999975441082000 | - |
| **18** | 0.4047851467671570 |  | 1.0000118610484400 |  |
| **19** | 0.4571669097733370 |  | 0.9999633970631890 |  |
| **20** | 0.4795765335751450 |  | 1.0001011820285900 |  |
| **21** | 0.4900170410254230 |  | 0.9998681549653520 |  |
| **22** | 0.4950635576823780 |  | 0.9999119692621970 |  |
| **23** | 0.4975452479459930 |  | 0.9805925690777790 |  |
| **24** | 0.4987760123783460 |  | 1.0109303807925500 |  |
| **25** | 0.4993887478674540 |  | 1.1430852480754800 |  |
| **26** | 0.4996946111679380 |  | 1.9121199147505800 |  |
| **27** | 0.4998476463495160 |  | -1.8494243688435800 |  |
| **28** | 0.4999231686663780 |  | -0.2439785763848240 |  |
| **29** | 0.4999628987513570 |  | 0.9253762228004520 |  |
| **30** | 0.4999786369761810 |  | 1.0020683413974800 |  |
| **31** | 0.4999950406220260 |  | 7.0980722110260800 |  |
| **32** | 0.4999776842774290 |  | -2.9707238850226000 |  |
| **33** | 0.5000151638689940 |  | -0.0523182838027634 |  |
| **34** | 0.4999988078652640 |  | 0.9999992147263710 |  |
| **35** | 0.5000024557697100 |  | 1.0000049337576500 |  |
| **36** | 0.4999935984279980 |  | 0.9999901266044980 |  |
| **37** | 0.5002684058661890 |  | 1.0000128836491200 |  |
| **38** | 0.5000243265697690 |  | 1.0000219015641300 |  |
| **39** | 0.4989263723112910 |  | 0.9993298482503610 |  |
| **40** | 0.5021517817948900 |  | 0.9990390841190840 |  |
| **41** | 0.4912348947381800 |  | 0.9956825037256630 |  |
| **42** | 0.5178429828559040 |  | 1.0084115621936700 |  |
| **43** | 0.4823889634851090 |  | 0.9415402252614370 |  |
| **44** | 0.4984127230149820 |  | 1.0625365286603700 |  |
| **45** | 0.5796178550088800 |  | 0.0000000000000000 |  |
| **46** | 0.2417583054097620 |  | - |  |
| **47** | 1.0454538361051900 |  |  |  |
| **48** | 0.9565223881386050 |  |  |  |
| **49** | 0.0000000000000000 |  |  |  |
| **50** | #DIV/0! |  |  |  |
| **51** | - |  |  |  |

# 2.5.3. Equação 3

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **i** | **Bissection** | **Secant** | **Newton** | **Halley** |
| **Ordem de convergência Equação 3** | | | |
| **0** | - | - | - | - |
| **1** | 1.0000000000000000 | -1.7061430996611400 | 1.5209529924777600 | 2.2759713325120200 |
| **2** | 1.0000000000000000 | 0.3554869661130510 | 1.7563356752591000 | 2.9221150958202300 |
| **3** | 1.0000000000000000 | 2.6017298739611900 | 1.9485291293477500 | 1.4293092617930700 |
| **4** | 1.0000000000000000 | 1.1690625607810200 | 1.9975480360091300 | 0.0000000000000000 |
| **5** | 1.0000000000000000 | 1.6718879635985500 | #NÚM! | - |
| **6** | 1.0000000000000000 | 1.5514465348317800 | #DIV/0! |  |
| **7** | 1.0000000000000000 | 1.6353399839838200 | - |  |
| **8** | 1.0000000000000000 | 1.6108146981451700 |  |  |
| **9** | 1.0000000000000000 | #NÚM! |  |  |
| **10** | 1.0000000000000000 | #DIV/0! |  |  |
| **11** | 1.0000000000000000 | - |  |  |
| **12** | 1.0000000000000000 |  |  |  |
| **13** | 1.0000000000000000 |  |  |  |
| **14** | 1.0000000000000000 |  |  |  |
| **15** | 0.9999999999905450 |  |  |  |
| **16** | 1.0000000000283600 |  |  |  |
| **17** | 0.9999999999810900 |  |  |  |
| **18** | 1.0000000000000000 |  |  |  |
| **19** | 1.0000000000000000 |  |  |  |
| **20** | 1.0000000000000000 |  |  |  |
| **21** | 0.9999999993948900 |  |  |  |
| **22** | 1.0000000006051100 |  |  |  |
| **23** | 1.0000000000000000 |  |  |  |
| **24** | 1.0000000000000000 |  |  |  |
| **25** | 1.0000000000000000 |  |  |  |
| **26** | 1.0000000000000000 |  |  |  |
| **27** | 1.0000000387270500 |  |  |  |
| **28** | 0.9999998838188540 |  |  |  |
| **29** | 1.0000000774541100 |  |  |  |
| **30** | 1.0000003098164300 |  |  |  |
| **31** | 0.9999996901836700 |  |  |  |
| **32** | 0.9999987607346960 |  |  |  |
| **33** | 1.0000037178015800 |  |  |  |
| **34** | 0.9999975214744710 |  |  |  |
| **35** | 0.9999900858988600 |  |  |  |
| **36** | 1.0000099141994300 |  |  |  |
| **37** | 1.0000000000000000 |  |  |  |
| **38** | 1.0000000000000000 |  |  |  |
| **39** | 1.0001586337943100 |  |  |  |
| **40** | 0.9995241915372850 |  |  |  |
| **41** | 1.0003173508273000 |  |  |  |
| **42** | 1.0012694193875700 |  |  |  |
| **43** | 0.9987321899950340 |  |  |  |
| **44** | 1.0000000000000000 |  |  |  |
| **45** | 1.0000000000000000 |  |  |  |
| **46** | 0.9798221180623700 |  |  |  |
| **47** | 1.0205934134019500 |  |  |  |
| **48** | 1.0000000000000000 |  |  |  |
| **49** | 1.1699250014423100 |  |  |  |
| **50** | 0.8547556456757270 |  |  |  |
| **51** | - |  |  |  |

A equação 3 apesar de ser a única equação que possuía múltiplas raízes foi a que apresentou o melhor resultado para o cálculo da ordem de convergência.

Obs. Para iterações próximos da raiz (últimas iterações do algoritmo) é possível ver erros como #NÚM! E #DIV/0.

* **#NÚM!** – A planilha tenta calcular, isso deve-se ao fato que o valor convergido é igual ao à raiz . Quando , temos que , assim a planilha tenta calcular .
* **#DIV/0!** – A planilha tenta realizar uma divisão por 0, isso ocorre quando e são iguais à raiz . Assim ocorrendo uma operação , não sendo possível realizar o cálculo.
* **Última iteração da convergência resultar em 0** – Acontece quando ocorre dois termos calculados iguais em sequência e ambos são diferentes da raiz. Quando e ao mesmo tempo que , temos que . Portanto, ao calcular temos , e temos portanto algo como

# Conclusão

Em suma, podemos observar resultados indesejados para todos os métodos na equação 2 e especificamente problemas de convergência no método da bissecção da equação 1. Os valores esperados para cada ordem de convergência para os métodos da bisseção, secante, Newton e Halley eram:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Bissecção** | **Secante** | **Newton** | **Halley** |
| 1 | ~1.618 | 2 | 3 |

O valor estimado da ordem de convergência para o **método da bisseção na equação 1** não foi o esperado, provavelmente isso se deve ao fato de não termos a raiz exata o que leva a aproximações nos cálculos e na discrepância encontrada na tabela.

Os **resultados da convergência da equação 2** ocorreram pois um dos critérios de convergência - como pode ser visto nas notas de aula - é que seja diferente de 0, entretanto para equação 2 dado por possui já que:

Assim, como o critério não é atendido as convergências esperadas não são garantidas, além disso alguns valores de valores iniciais na equação 2 mostravam também que para alguns métodos não era possível achar a raiz, já que o critério de convergência não é atendido

Para o **método da secante na equação 3** foi necessário escolher e à direita da maior raiz, já que não há raízes para , assim não haveria risco do algoritmo convergir para alguma outra raiz que não fosse a maior no caso , desde que os valores iniciais fossem próximos o suficiente da raiz esperada

Para os outros métodos para próximo às iterações finais podemos ver que todos os valores foram próximos do esperado, particularmente na equação tal resultado é o mais evidente entre as três equações.

Por fim, os métodos numéricos conseguiram de fato uma ótima aproximação e até mesmo em alguns casos a raiz exata das funções, porém existe casos específicos em que é necessário tomar alguns cuidado para obter a raiz correta, seja na escolha dos valores iniciais ou mesmo comparar a os resultados com outros métodos, uma vez que o resultado calculado por divergir ligeiramente por causa do comportamento da função.